無限次元空間上の確率微分方程式に関する諸問題 (多様体上の確率微分方程式)

伊藤, 清

数理解析研究所講究録
391巻 1980年 91-107

無限次元空間上の確率微分方程式に関する諸問題

学習院大学理学部　伊藤 清

1. はしがき．微分方程式論を展開するのに最も適当な場は多様体である．このことは確率微分方程式についても同様であって，最近有限次元の多様体の上の確率微分方程式論はますます盛んになりつゝある．しかし無限次元の多様体となると，定義もいろいろあって，最も適当なものが何であるかがきまっているわけではない．例えば，局所座標の空間をBanach空間としたもの，Hilbert空間としたもの，核型空間としたものなどいろいろ考えられる．また最も適当といっても，如何なる問題をとり扱うかによるかもしれない．無限次元空間上の確率微分方程式といっても，一体どういう問題をとり扱うのに必要かという所まで遡って考えなければ，結局有限次元の場合の形式的一般化という程度のことしか考えられず，面白味がない．

無限次元空間上の確率微分方程式となると，多様体上で考える所か，平坦な空間（線形空間）の上ですら幾多の問題がある．$n\,(<\infty)$ 次元の空間はすべて位相ベクトル空間として R^n と同型であるが，

無限次元となると，そうはいかない．それで平坦な空間の上ですら，無限次元空間の確率微分方程式が具体的な問題にどういう形で現われてくるかということを考える必要がおこる．こういう風に考えて，極めて簡単な問題を研究するにも，確率論における regularization の問題をチェックしておく必要を感ずるに至った．こゝではこの問題について述べたい．まことに羊頭狗肉の感があるが，いつかは羊肉を売り出すことができるようになることを念じている．

<u>2. 確率過程の regularization.</u> 最も素朴な意味での確率過程は写像 $X : T \to L^0$ の形であらわされる．こゝで T は時の空間で，例えば $[0,\infty)$, $[a,b)$, $(-\infty,\infty)$ であり，L^0 は基礎の確率空間 (Ω, P) 上の実確率変数（実数値 P-可測関数）の全体 $L^0(\Omega, P)$ である．L^0 は線形空間で，ノルム

$$\|A\|_0 = E(|A| \wedge 1)$$

をとると，Frechet 空間となるが，Banach 空間とはならない．$\|A\|_0$ のときには，$A = 0$ a.s. であるから，殆んど (P) 到る所一致する確率変数は L^0 の上では同一視される．

しかし Wiener 過程，Lévy 過程，拡散過程などは，このような素朴な意味の確率過程ではない．例えば Wiener 過程 B は写像

(B.0) $B : \Omega \to C$ $\quad C = C[0,\infty)$

で，

(B.1) $B(t)$ は $N_{0,t}$ に従う，

(B.2) $0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \implies \{B(t_i) - B(t_{i-1})\}_i$ は独立.

の2条件を満すものと定義せられる. 最近確率過程とよばれるものはおおむねこの意味のものである. この区別をするため，前者を弱義の確率過程，後者を強義の確率過程とよぶことにしよう. 強義の確率過程というのは

$X : \Omega \to F$ $\quad F = F(T)$ はある関数空間 $(T \to \mathbb{R})$

の形で与えられる. これに対して弱義の確率過程は前述したように $X : T \to L^0$ の形で与えられる.

さて強義の確率過程 $X : \Omega \to F$ に対し，弱義確率過程

$$\hat{X} : T \longrightarrow L^0, \quad t \longmapsto \hat{X}(t) = e_t(X) \ (\text{あるいは } e_t \circ X)$$

が得られる. ここで $e_t : F \longrightarrow \mathbb{R}$ は evaluation map で，$f \in F$ に対し $f(t) \in \mathbb{R}$ を対応させる. $e_t(X)$ は普通 $X(t,\omega)$, $X_t(\omega)$ などであらわされる.

さて Wiener 過程 (Brown 運動) $B : \Omega \to C$ に対して，上のように弱義の確率過程 $\hat{B} : [0,\infty) \to L^0$ をつくると，(B.1), (B.2) がなりたつ. さて逆に弱義の確率過程 $\hat{B} : [0,\infty) \to L^0$ が (B.1), (B.2) をみたすとすれば (このとき $\hat{B}$ は pre-Brownian motion

とよばれる)，強義の確率過程 $B:\Omega\to C$ が存在して，$B(t,\omega)=\hat{B}(t,\omega)$ a.s. となることが証明される．この B は当然 Brown 運動 (Wiener過程) となる．B と $\hat{B}$ とは弱義の確率過程としては一致する．

一般に弱義の確率過程としてある性質 (例えば上の例では (B.1), (B.2)) をもつ強義の確率過程 $X:\Omega\to F$ を構成する通常の手段は

第1段．その性質をもつ弱義の確率過程 $\hat{X}:T\to L^p$ を作る．このため Kolmogorov の拡張定理が用いられるのが通例である．

第2段 t の各値に対し，$X(t)=\hat{X}(t)$ a.s. となる $X:\Omega\to F$ を見出す．このとき X と $\hat{X}$ とは弱義の確率過程としては同じである．

この第2段の操作は F-regularization とよばれる．このため屡々用いられるのは次の定理である．

Kolmogorov の定理：'$\exists\alpha,\beta,\gamma>0$ $E(|\hat{X}(t)-\hat{X}(s)|^{\alpha})\leqq\beta|t-s|^{\gamma+1}$'
は C-regularization 存在のため十分

Doob の定理：'$\hat{X}(t)$ がマルチンゲールで，確率連続'
は D-regularization 存在のため十分．

F-regularization が確率1をもって一意に定まるかということは重要な問題である．F が C や D のときには，これは

正しい．

二つの関数空間 $F_1 = F_1(T)$, $F_2 = F_2(T)$ があり，$F_1 \subset F_2$ とする．今強義の確率過程 $X_1 : \Omega \to F_1$, $X_2 : \Omega \to F_2$ があって，

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) \quad \text{a.s.}$$

であるとすれば，$X_2(\omega)$ を P 零集合の上で修正することにより，$X_1(\omega)$ が得られる．しかし $X_1(\omega)$ を考えることは，$X_2(\omega)$ を考えることとは全く同じとはいえない．たとえば (B.1), (B.2) を満す弱義の確率過程（即ち pre-Brownian motion）に上記の Doob の定理を適用して強義の確率過程 $\tilde{B} : \Omega \to D$ が得られたとしても，$\tilde{B}$ は Brown 運動そのものではない．しかし P 測度 0 の上で修正すれば，Brown 運動 B となる．（勿論この修正のための証明は必要である．）したがって $\tilde{B}$ と B との差違は本質的なものではない．これに反し pre-Brownian motion $\hat{B} : [0, \infty) \to L^0$ と Brown 運動 $B : \Omega \to C[0, \infty)$ との違いは，概念的なものである．この概念的差違を埋めるのが regularization である．

3. 超過程の regularization　関数の一般化として超関数があるように，確率過程の一般化として超過程がある．超関数は普通 Schwartz の空間 $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ の元として定義されるが，もっと一般的にいえばある TVS (= topological vector

space) Φ の上の連続、線形汎関数として（あるいは Φ の双対空間 Φ^* の元として）定義される。これに確率の parameter $\omega \in (\Omega, P)$ を入れて，超過程を定義するわけであるが，確率過程の場合と同様，強義超過程，弱義超過程の2種が考えられる．

弱義超過程 X は

$$X : \Phi \to L^0, \quad \varphi \mapsto X(\varphi, \cdot)$$

の形で与えられ，$X(\varphi) = X(\varphi, \omega)$ は φ について線形かつ連続である．ここで連続とは

$$\varphi \xrightarrow[\Phi]{} 0 \implies \|X(\varphi)\|_0 \to 0 \quad (\text{即ち } X(\varphi) \to 0 \text{ i.p.})$$

である（$X(\varphi)$ が φ について線形であることに注意）．

これに対し，強義超過程 $\tilde{X}$ は

$$\tilde{X} : \Omega \to \Phi^*, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega)$$

の形で与えられる．$X(\varphi, \omega)$ は φ の関数としては連続線形汎関数，ω に関して可測である．

Φ の線形構造だけをそのまゝにしておいて，その位相だけをいろいろ変えて TVS とすることがあるので位相をあらわす記号 $\tau, \sigma, \cdots$ を添えて Φ_τ, Φ_σ とする．

さて与えられた弱義超過程 $X : \Phi_\tau \to L^0$ に対して，もし強義超過程 $\tilde{X} : \Omega \to \Phi_\sigma^*$ があって

$$\forall \varphi \in \Phi \quad \tilde{X}(\varphi, \omega) = X(\varphi, \omega) \text{ a.s.}$$

となるとき, $\tilde{X}$ は X の regularization という. regularization がどういう条件の下に ~~ある~~ 存在するか, また $\sigma=\tau$ とすることができないかという問題がおこる.

超過程に関する regularization theorem　τ も σ も multi-Hilbertian で $\tau \underset{HS}{<} \sigma$ のときには, 上述の regularization が存在する. 特に τ が nuclear ($\tau \underset{HS}{<} \tau$) のときには, 勿論 $\sigma=\tau$ とすることができる.

この定理は Sazonov-Minlos-Kolmogorov の 'generalized Bochner theorem' 参照) の変形であり, 証明も同じ技巧でなされるが, 上の形にしておいた方が確率論では便利であり, 証明も probabilist には ~~分り~~ 理解し易い.

上の定理を証明する前に, 定理にあらわれる術語について説明する.

Vector 空間 Φ の上の(線形)位相の中で, いくつか(非可算個でもよい)の separable Hilbertian semi-norm の系で定義されるものを multi-Hilbertian topology という. このような位相を Φ にとって得られる TVS を Φ_τ であらわす. (Hilbertian semi-norm というとき completeness は仮定しない).

p, q を Φ 上の二つの separable Hilbertian semi-norm

とする．p に対する内積を $p(\varphi, \psi)$ とかく．明らかに

$$p(\varphi, \varphi) = p(\varphi)^2, \qquad p(\varphi+\psi)^2 = p(\varphi)^2 + 2p(\varphi, \psi) + p(\psi)^2.$$

qについても同様．p対qの比 $(p:q)$ を

$$(p:q) = \sup\{ p(e) ; q(e) = 1 \}$$

で定義し，これが有限のとき，$p \prec q$ とかく．このときは明らかに

$$\forall \varphi \quad p(\varphi) \leqq (p:q)\, q(\varphi).$$

また p対qのHS比(Hilbert-Schmidt ratio) $(p:q)_{HS}$ を

$$(p:q)_{HS} = \sup\left\{ \sqrt{\sum_n p(e_n)^2} \; ; \; \forall m, n \;\; q(e_n, e_m) = \delta_{nm} \right\}$$

で定義し，これが有限のとき $p \underset{HS}{\prec} q$ とかく．明らかに

$$(p:q) \leqq (p:q)_{HS} \; ; \quad p \underset{HS}{\prec} q \Rightarrow p \prec q.$$

さて Φ の上に二つの multi-Hilbertian topology

$$\tau = \{ p_\alpha, \alpha \in A \}, \qquad \sigma = \{ q_\beta, \beta \in B \}$$

があり，

$$\forall \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad p_\alpha \underset{HS}{\prec} q_\beta$$

となるとき，$\tau \underset{HS}{\prec} \sigma$ とかく．したがって $\tau = \{p_\alpha\}$ が nuclear とは

$$\forall \alpha \in A \quad \exists \alpha' \in A \quad p_\alpha \underset{HS}{\prec} p_{\alpha'}$$

となることに外ならない．$\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ の上の Schwartz topology は nuclear である．

例　$\Phi = \mathcal{D}(0,1)$, B を Brown 運動 とし, Wiener 積分

$$X(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\, dB(t)$$

を考える. $X: \Phi \to L^2(\Omega) \subset L^0(\Omega)$ は線型で

$$\|X(\varphi)\|_0 \leqq \|X(\varphi)\|_2 \ (= E(|X(\varphi)|^2)) = \|\varphi\|_2 \ (= \|\varphi\|_{L^2[0,1]})$$

となる. したがって $X: \Phi \to L^0(\Omega)$ は連続線形で, 弱義の超過程である.

さて Φ の上の $\| \ \|_2$-連続線形汎関数の全体 $\Phi^*_{\| \|_2}$ は $L^2[0,1]$ である. しかしまた一方, 殆んど確実に

$$X(\varphi) = -\int_0^1 \varphi'(t) B(t)\, dt = \dot{B}(\varphi), \quad \varphi \in \Phi = \mathcal{D}[0,1],$$

である. こゝに $\dot{B}$ は B の超関数の意味の導関数, 即ち white noise である. $B(t,\omega)$ は t に関して到る所微分不可能であるから, $\dot{B}$ は真の意味の超関数 (確率 1 で) であって, $\dot{B} \notin L^2(0,1)$ a.s. となる. 実は

$$|||\varphi|||^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2 \qquad (\Omega \to \Phi^*_{||| |||})$$

とおけば, $||| \ ||| \underset{HS}{>} \| \ \|_2$ となり, X の regularization $\tilde{X}$ が存在し (上記の regularization による),

$$P(\forall \varphi \quad \tilde{X}(\varphi) = \dot{B}(\varphi)) = 1$$

となるのである. ~~(実は 均あから $X(\varphi) =$~~ (かし $\dot{B}$ は $\dot{C}$ (= 連続関数の超関数的導関数の全体) に属する (a.s.) が,

regularization theorem でわかることは $\dot{B} \in \Phi^*_{|||\ |||}$ で $\dot{B} \in \dot{C}$ よりは少し粗い結果である．

<u>4. 超過程の regularization theorem の証明</u>　証明の idea を分りやすくするために，まず C も $\sim$ もそれぞれ唯一つの separable Hilbertian semi-norm p, q で与えられる場合から始める．即ち

$$X : \Phi_p \longrightarrow L^0 = L^0(\Omega, P)$$

が線形，連続で，$p \underset{HS}{\prec} q$ のときには，

$$\tilde{X} : \Omega \to \Phi_q^*$$

があって，

$$(4.1) \qquad \forall \varphi \qquad \tilde{X}(\varphi, \omega) = X(\varphi, \omega) \quad \text{a.s.}$$

となることを示す．

$X : \Phi_p \to L^0$ の連続性により $p(\varphi) \to 0 \Rightarrow \|X(\varphi)\|_0 \to 0$.

$\Rightarrow P_{X(\varphi)} \to \delta_0 \Rightarrow E(e^{iX(\varphi)}) \to 1 \Rightarrow \mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) \to 1$.

したがって

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$p(\varphi) < \delta \Rightarrow \mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) > 1 - \varepsilon .$$

しかし $\mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) \geqq -1$ は常に正しいから，結局常に

$$(4.2) \qquad \mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) > 1 - \varepsilon - 2\frac{p(\varphi)^2}{\delta^2}$$

がなりたつ.

$\{e_n\}$ を Φ の中の g-CONS とし，上の式で $\varphi = \sum_1^n a_k e_k$

とおくと，

$$\mathcal{R} E\left(e^{i \sum_1^n a_k X(e_k)}\right) > 1 - \varepsilon - \frac{2}{\delta^2} \sum_{j,k=1}^n a_j a_k \, p(e_j, e_k)$$

この両辺に $\int \cdots \int_{R^n} \cdots N_v(da_1) \cdots N_v(da_n) \quad (N_v = N_{0,v})$ を適

用すると

$$E\left(e^{-\frac{v}{2} \sum_1^n X(e_k)^2}\right) > 1 - \varepsilon - \frac{2}{\delta^2} \sum_{j,k=1}^n v \, \delta_{jk} \, p(e_j, e_k)$$

$$= 1 - \varepsilon - \frac{2v}{\delta^2} \sum_{k=1}^n p(e_k)^2$$

$$\geqq 1 - \varepsilon - \frac{2v}{\delta^2} (p ; g)_{HS}$$

$n \uparrow \infty$ とすると $E(\ )$ の中は

$$\Omega_1 = \left\{ \omega ; \ \sum_1^\infty X(e_k)^2 < \infty \right\} \text{ の上では } e^{-\frac{v}{2} \sum_1^\infty X(e_k)^2} \text{ に}$$

$$\Omega_1^c \text{ の上では } 0 \text{ に}$$

近づくから，

$$E\left(e^{-\frac{v}{2} \sum_1^\infty X(e_k)^2}, \Omega_1\right) \geqq 1 - \varepsilon - \frac{2v}{\delta^2} (p ; g)_{HS}$$

まず $v \downarrow 0$ とし

$$(4.3) \qquad \mathbf{P}(\Omega_1) \geqq 1 - \varepsilon$$

つぎに $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$(4.4) \qquad P(\Omega_1) = 1$$

を得る．

さて

$$\tilde{X}(\varphi,\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g(\varphi, e_k) X(e_k,\omega) & \omega\in\Omega_1,\ \varphi\in\Phi \\ 0 & \omega\in\Omega_1^c,\ \varphi\in\Phi \end{cases}$$

とおく．これが well-defined であるのは，$\omega\in\Omega_1$ に対しては

$$\left(\sum_{1}^{\infty} |g(\varphi,e_k)||X(e_k,\omega)|\right)^2 \leqq \sum_k g(\varphi,e_k)^2 \sum_k X(e_k,\omega)^2$$
$$= g(\varphi)^2 \sum_k X(e_k,\omega)^2 < \infty$$

となるからである．$\tilde{X}(\varphi,\omega)$ が φ に関して連続かつ線形であることは容易にわかる．しかも

$$\tilde{X}(\cdot,\omega)\in\Phi_*^g \qquad \|\tilde{X}(\cdot,\omega)\|_{\Phi_*^g} \begin{cases} \leqq \sqrt{\sum_1^{\infty} X(e_k,\omega)^2} & \omega\in\Omega_1 \\ = 0 & \omega\in\Omega_1^c \end{cases}$$

つぎに (4.1) を示せば，証明が終る．$\varphi=\sum_1^n a_k e_k$ のときには，定義により，(4.1) は明らか．($\because$ $\tilde{X}(\varphi)=\sum_1^n a_k X(e_k) = X(\varphi)$ a.s.)．一般の $\varphi\in\Phi$ に対しては $\varphi_n=\sum_1^n g(\varphi,e_k)e_k$ とおくと，$g(\varphi-\varphi_n)\to 0$．$p \underset{HS}{\prec} g$ により，$p<g$ したがって $p(\varphi-\varphi_n)\to 0$．これから $\|X(\varphi)-X(\varphi_n)\|_0\to 0$．また定義により $\tilde{X}(\varphi)-\tilde{X}(\varphi_n)\to 0$ a.s. 上に示したように，$\tilde{X}(\varphi_n)=X(\varphi_n)$ a.s. であるから $\tilde{X}(\varphi)=X(\varphi)$ a.s. がでる．

つぎに，一般の場合 ($\tau = \{p_\alpha, \alpha \in A\}$, $\sigma = \{q_\beta, \beta \in B\}$) の証明に移ろう．まず $\varepsilon_n > 0$ を

$$\sum_n \varepsilon_n < \infty$$

となるようにとる．$X : \Phi_\tau \to L^0 = L^0(\Omega, P)$ は連続であるから，適当な $p_n \equiv p_{\alpha_n}$, $\delta_n > 0$ が存在して

$$(4.5) \qquad p_n(\varphi) < \delta_n \Longrightarrow \|X(\varphi)\|_0 < \varepsilon_n \overset{*}{\Longrightarrow} |E(e^{iX(\varphi)}) - 1|_\wedge < 2\varepsilon_n$$

$$\Longrightarrow \mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) > 1 - 2\varepsilon_n$$

$\mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) \geqq -1$ は常になりたつから，(4.5) から

$$(4.6) \qquad \mathcal{R}E(e^{iX(\varphi)}) > 1 - 2\varepsilon_n - 2\frac{p_n(\varphi)^2}{\delta_n^2}$$

が得られる．$\{p_n\}$ を適当にとって

$$p_1 \prec p_2 \prec \cdots\cdots$$

とすることができる．

$\tau \underset{HS}{\prec} \sigma$ により，$q_n \equiv q_{\beta_n} \underset{HS}{\succ} p_n$ がとれるが，これも

$$q_1 < q_2 < \cdots$$

とすることができる．

---

* 一般に $|e^{ix} - 1| = |\int_0^x i e^{iy}\,dy| \leqq |x| \leqq 2|x|$

左辺は明らかに 2 を超えないから $|e^{ix} - 1| \leqq 2|x| \wedge 2 = 2(|x| \wedge 1)$

これを用いて

$$|E(e^{iX(\varphi)}) - 1| \leqq E(|e^{iX(\varphi)} - 1|) = 2E(|X(\varphi)| \wedge 1) = 2\|X(\varphi)\|_0$$

$$\tau' = \{p_n\}, \quad \sigma' = \{g_n\}$$

とすると，

$$\tau' < \tau, \quad \sigma' < \sigma, \quad \tau' \underset{HS}{<} \sigma'$$

となる．(4.5) により $X(\varphi)$ は τ' についても連続である．

g_n は separable であるから，σ' も separable となり，$\Phi_{\sigma'}$ の中で稠密な可算集合 $D = \{d^1, d^2, \cdots\} \subset \Phi_{\sigma'}$ がある．

$D = \{d^j\}_j$ から Schmidt の orthogonalization (g_n) によって g_n-CONS $\{e_{nk}, k=1,2,\cdots\}$ をつくる．明らかに

$$(4.7) \qquad d^j = \sum_{k=1}^{K(n,j)} a_{nk}^j \, e_{nk} + r_n^j, \quad K(n,j) < \infty, \quad g_n(r_n^j) = 0$$

とかける．r_n^j が出るのは g_n が <u>semi</u>-norm であるからである．

前の特別の場合と同様に，(4.7) において

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} a_m \, e_{nk}$$

とおいて，両辺を $N_v(da_1) \cdots N_v(da_m)$ で積分し，$m \to \infty$ とし，さらに $v \downarrow 0$ とすると，

$$(4.8) \qquad P(\Omega_n) \geqq 1 - 2\varepsilon_n, \quad \text{但し} \quad \Omega_n = \left\{ \omega ; \sum_{k=1}^{\infty} X(e_{n,k}, \omega)^2 < \infty \right\}$$

が得られる．さらに

$$(4.9) \qquad \tilde{X}_n(\varphi, \omega) = \begin{cases} \sum_k g_n(\varphi, e_{nk}) \, X(e_{nk}, \omega), & \Omega_n \text{ の上で} \\ 0 & \Omega_n^c \text{ の上で} \end{cases}$$

とおくと，すべての $\omega \in \Omega$ に対して

$$(4.10) \qquad \tilde{X}_n(\cdot, \omega) \in \Phi_{q_n}^* \subset \Phi_{\sigma'}^* \subset \Phi_\sigma^*$$

となる．

つぎに

$$(4.11) \qquad P(\Omega_n') \geqq 1 - 2\varepsilon_n, \quad \text{但し} \quad \Omega_n' = \{\omega : X(r_n^j) = 0, j = 1, 2, \cdots\}$$

を示そう．(4.7) で $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j r_n^j$ とおくと，$q_n(r_n^j) = 0$，$p_n \underset{HS}{<} q_n$ により $p_n(r_n^j) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$，したがって

$$p_n(\varphi) \leqq \sum_{j=1}^m |a_j| \, p_n(r_n^j) = 0.$$

であるから，結局

$$\mathcal{R} E\left(e^{i \sum_{j=1}^m a_j X(r_n^j)}\right) > 1 - 2\varepsilon_n .$$

再び $N_v(da_1) N_v(da_2) \cdots N_v(da_m)$ で積分して

$$E\left(e^{-\frac{v}{2} \sum_{j=1}^m X(r_n^j)^2}\right) > 1 - 2\varepsilon_n .$$

こゝで $m \uparrow \infty$ とし，さらに $v \uparrow \infty$ として (4.11) が得られる．

$X : \Phi_\sigma \to L^0$ は線型であるから

$$(4.12) \quad P(\Omega_n'') = 1, \quad \text{但し} \quad \Omega_n'' = \{\omega : \forall j \;\; X(d^j) = \sum_{k=1}^{k(n,j)} a_{nk}^j X(e_{nk}) + X(r_n^j)\}$$

(4.8), (4.11), (4.12) より

$$(4.13) \qquad P(\Omega_n''') \geqq 1 - 4\varepsilon_n, \quad \text{但し} \quad \Omega_n''' = \Omega_n \cap \Omega_n' \cap \Omega_n'' .$$

(4.9) により

$$(4.14) \qquad \omega \in \Omega_n''' \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}_n(d^j, \omega) = X(d^j, \omega), \quad j = 1, 2, \cdots$$

(4.13) から Borel-Cantelli の定理 ($\sum \varepsilon_n < \infty$ に注意！) により

$$(4.15) \qquad P(\Omega_\infty) = 1, \text{ 但し } \Omega_\infty = \liminf_{n \to \infty} \Omega_n'''.$$

さて $\omega \in \Omega_\infty$ のときには, $n_0(\omega)$ があって

$$(4.16) \qquad \tilde{X}_{n_0}(d^j, \omega) = \tilde{X}_{n_0+1}(d^j, \omega) = \cdots (= X(d^j, \omega))$$
$$(\ j = 1, 2, \cdots\ )$$

$\{d^j\}_j$ は $\Phi_{\sigma'}$ の中で稠密であるから，任意の φ に対して

$$d^{j(m)} \xrightarrow[\sigma']{} \varphi$$

となる部分列 $\{d^{j(m)}\}_m$ がとれる. $\tilde{X}_n(\cdot, \omega) \in \Phi_{\sigma'}^*$ であるから,

$$\tilde{X}_n(\varphi, \omega) = \lim_{m \to \infty} \tilde{X}_n(d^{j(m)}, \omega)$$

したがって (4.16) により $\omega \in \Omega_\infty$ に対して

$$(4.17) \qquad \tilde{X}_{n_0}(\varphi, \omega) = \tilde{X}_{n_0+1}(\varphi, \omega) = \tilde{X}_{n_0+2}(\varphi, \omega) = \cdots$$
$$(\ j = 1, 2, \cdots\ )$$

この共通の値をもって $\tilde{X}(\varphi,\omega)$ と定義する．$\omega\in\Omega_\infty^c$ に対しては $\tilde{X}(\varphi,\omega)\equiv 0$ と定義する．これで

$$\tilde{X}(\cdot,\omega)\in\Phi_{\sigma'}^{*}\subset\Phi_{\sigma}^{*}$$

が得られた．

(4.5) から

$$\tilde{X}(d^j,\omega)=X(d^j,\omega)\quad \text{a.s.}\quad (j=1,2,\cdots)$$

つぎに任意の φ に対しては，上の部分列 $\{d^{j(m)}\}$ をとると，

$$\tilde{X}(\varphi,\omega)=\lim_{m\to\infty}\tilde{X}(d^{j(m)},\omega)\quad \text{a.s.}\ (\text{実際 } \Omega_\infty \text{ の上で})$$

$d^{j(m)}\xrightarrow[\sigma']{}\varphi$ であるから $d^{j(m)}\xrightarrow[\tau']{}\varphi$（$\tau'<\sigma'$ による）．

(4.5) により $X:\Phi_{\sigma'}\to L^0(\Omega)$ は連続であるから，

$$X(d^{j(m)})\xrightarrow[\|\ \|_0]{}X(\varphi)\quad (\text{即ち確率収束}).$$

上の3式から

$$\tilde{X}(\varphi,\omega)=X(\varphi,\omega)\quad \text{a.s.}$$

が得られ，これで regularization theorem は完全に証明された．